CARLO FELICE MANARA

ARGOMENTI VECCHI ED INSEGNAMENTI NUOVI: I DIAGRAMMI TRIANGOLARI

Estratto da LE SCIENZE - Fasc. 2-3, 1965

FIRENZE
CASA EDITRICE FELICE LE MONNIER
1965

ARGOMENTI VECCHI ED INSEGNAMENTI NUOVI: I DIAGRAMMI TRIANGOLARI

1. – È ben noto che nelle moderne tendenze della matematica vengono molto spesso combattuti i « vecchi » argomenti, come quelli che hanno ormai provocato la noia e la ripugnanza di intere generazioni di studenti. Uno di tali argomenti è quello del triangolo, che viene condito in tutte le salse negli insegnamenti di matematica elementare; a partire dalle scuole elementari, quando viene per la prima volta presentata la nomenclatura « equilatero », « isoscele », « scaleno », alle classi delle scuole secondarie, in cui vengono ammanniti i « criteri di uguaglianza » e la trigonometria, si potrebbe dire che molta parte della nostra geometria è incentrata sull'argomento « triangolo ». Quindi è comprensibile che un matematico come J. Dieudonné abbia lanciato il motto « Abbasso Euclide, basta con i triangoli » come una specie di parola d'ordine per il rinnovamento della matematica e del suo insegnamento.

Si potrebbe tuttavia osservare che per buona parte questa sollevazione è giustificata non tanto dal fatto che gli argomenti sono vecchi, ma soprattutto dal modo vecchio di presentarli; è quindi anche possibile con i « vecchi » triangoli suscitare l'interesse dei ragazzi.

Ci proponiamo qui di ricordare un « vecchio » teorema, ricollegandolo alle applicazioni che ne vengono fatte dalle scienze pure ed applicate ed anche dalla matematica ricreativa. Saremo lieti se avremo fornito agli insegnanti qualche esempio in più e qualche argomento per rendere « viva » la lezione di matematica, così da suscitare interesse negli allievi e spingerli alla « scoperta » delle proprietà che devono apprendere ed applicare, in modo che in essi nasca la nozione di matematica come scienza viva e non come ammuffita congerie di formule e di enunciati.

2. – Il teorema cui vogliamo alludere è quello che dice:

« Dato un triangolo equilatero, la somma delle distanze di un punto qualunque del triangolo dai tre lati è indipendente dal punto ed è uguale al valore comune delle tre altezze » [1].

---

[1] Come è noto, la proprietà vale anche per un punto qualunque *del piano*; in altre parole la clausola restrittiva che il punto appartenga al triangolo (cioè ai lati oppure al suo interno) non è necessaria. Tuttavia per poter enun-

Supponiamo che la scolaresca già possieda questo teorema, a cui del resto si può giungere con un ragionamento molto semplice, che può anche servire come utile esercizio di algebra (raccoglimento a fattor comune).

Invero, supposto dato il triangolo di vertici A, B, C (fig. 1), il ragazzo non ha difficoltà ad ammettere che l'area del triangolo sia la somma delle aree dei tre triangoli: PAB, PBC, PCA; pertanto, indicando con una lettera qualunque, per esempio a, la lunghezza dei tre lati del triangolo e con d_1, d_2, d_3 le distanze di P dai tre lati, indicando poi con h l'altezza del triangolo (rispetto ad uno qualunque dei lati assunto come base), si ha:

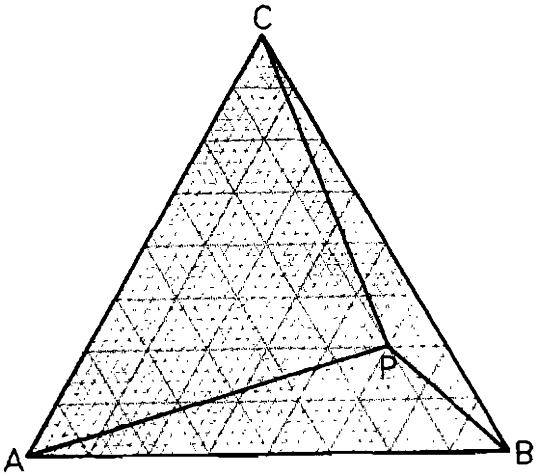

Fig. 1.

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ad_1 + \frac{1}{2}ad_2 + \frac{1}{2}ad_3 =$$
$$= \frac{1}{2}a(d_1 + d_2 + d_3);$$

di qui si ha immediatamente l'enunciato.

Orbene la proprietà che abbiamo ricordata del triangolo equilatero è stata da tempo utilizzata nelle scienze per rappresentare graficamente certi fenomeni dipendenti da tre componenti, in modo tale che interessi soltanto la frazione dei componenti stessi (percentuale) rispetto al totale.

Invero nulla vieta in tal caso di assumere l'altezza del triangolo come uguale a 100 volte l'unità di misura e di indicare le percentuali dei tre componenti come distanze dai tre lati del triangolo stesso: ne consegue che ogni punto P interno al triangolo rappresenta uno « stato » del miscuglio perchè determina in modo unico le percentuali dei tre componenti.

Si tratta di un modo diverso dal solito di introdurre il concetto di « coordinate », cioè di introdurre una corrispondenza tra elementi geometrici (in questo caso i punti del triangolo) e gli elementi analitici (in questo caso terne di numeri positivi aventi come somma 100).

Questa tecnica è utilizzata da tempo dalla Chimica, per esempio, per lo studio di certe leghe e di certe soluzioni; si può dire che in questa scienza i diagrammi triangolari sono di quotidiana applicazione tanto che esistono in commercio delle carte con la « rete » dei triangoli equilateri già tracciata, così come esiste la « carta millimetrata » che ogni tecnico sa usare speditamente.

---

ciare la proprietà in generale è necessario introdurre una convenzione per attribuire un segno alle distanze di un punto da una retta ed attribuire un senso alla somma algebrica. Preferiamo quindi l'enunciato ristretto, che d'altra parte sarà il solo qui utilizzato.

È interessante ricordare che anche in altri campi di dottrina questo procedimento viene regolarmente usato per rappresentare i fenomeni che risultano dalla commistione di tre elementi. A titolo di esempio, citiamo anzitutto la teoria della visione dei colori: sulla scorta di una conoscenza classica (già Newton sapeva che ogni colore poteva essere ottenuto come «somma» di tre colori base: rosso, giallo, azzurro) che è ormai entrata nella letteratura (1), la rappresentazione geometrica di un colore come un punto con certe coordinate rispetto ad un triangolo equilatero, che rappresentano le percentuali di certi colori base, è stata introdotta e usata metodicamente (2).

Un altro campo in cui tale rappresentazione geometrica viene usata è quello della biologia, in cui si applica questo tipo di rappresentazione, per esempio allo studio dei fenomeni di ereditarietà; il primo ad usare questa rappresentazione fu B. De Finetti il quale spesso parlando agli insegnanti di matematica lamenta il fatto di aver dovuto imparare a scuola una massa di proprietà «noiose» ed inutili mentre i diagrammi triangolari che gli servivano aveva dovuto «impararli» dai chimici. Egli non si stanca di sostenere una sua visione dell'insegnamento delle scienze in cui il ragazzo possa avere un quadro generale dei rapporti vivi tra le varie scienze e non apprenderle una per una come degli edifici già costruiti, imponenti ma vuoti e gelidi.

3. – Non abbiamo la possibilità di esporre nei loro particolari le applicazioni del nostro teorema, cui abbiamo fatto cenno; l'applicazione che vogliamo fare qui riguarda in particolare certi problemi di matematica ricreativa, alcuni dei quali già si trovano nell'opera di Nicolò Tartaglia: *General trattato di numeri et misure.* L'illustrazione geometrica che stiamo per esporre può servire per ispirare un procedimento risolutivo generale, ed è stata esposta recentemente in varie pubblicazioni dedicate alla matematica ricreativa (3).

Il problema di N. Tartaglia è il seguente: sono dati tre recipienti a, b, c aventi rispettivamente le capacità di 8, 5, 3 litri; il primo è pieno d'acqua e gli altri due sono vuoti; si deve, con travasi successivi da un recipiente all'altro, fare in modo da ottenere 4 litri d'acqua rispettivamente nel primo e nel secondo recipiente.

Poichè la quantità di acqua su cui si opera rimane costante durante tutte le manipolazioni ammesse, è del tutto naturale usare una rappresentazione mediante un triangolo equilatero. Siano A, B, C i vertici di tale triangolo e conveniamo che la quantità di acqua contenuta nei tre recipienti a, b, c sia misurata dalla distanza del punto del triangolo dai lati rispettivamente opposti ai vertici A, B, C. Tali distanze sono ovviamente proporzionali alle graduazioni riportate sui lati del triangolo.

Per brevità, conveniamo di chiamare «stato del sistema» ogni distribuzione degli 8 litri d'acqua fra i tre recipienti; allora ogni punto del triangolo rappresenta

---

(1) Cfr. per esempio, H. Bouasse, *Vision et réproduction des formes et des couleurs*, Paris.

(2) B. Finzi, *Alcune operazioni sui colori, rappresentati da coordinate proiettive omogenee.* «Rend. Ist. Lomb.», (2), 47 (1923), 729, 822.

(3) Cfr. per esempio A. Bakst, *Mathematical puzzles and pastimes*, Princeton (Ed. Van Nostrand) tradotto in francese da H. Borzer col titolo *Amusements mathématiques* (Paris, Dunod, 1961) oppure la brillante rubrica «Mathematical games» che il matematico Martin Gardner tiene mensilmente sulla rivista «Scientific American»; i numeri di settembre ed ottobre dell'annata 1963 di tale rubrica portano ampie trattazioni dei problemi che stiamo per esporre.

uno stato del sistema, in base alle convenzioni stabilite: così, per esempio, il punto A (fig. 2) rappresenta lo stato dei tre recipienti nel quale il recipiente a è pieno (di 8 litri) e b, c sono entrambi vuoti.

Poichè il recipiente b contiene soltanto 5 litri, è stata tracciata la retta MN parallela al lato AC, retta che rappresenta un « confine » che il punto rappresentativo dello stato del sistema non può sorpassare, senza aver dal lato stesso una distanza superiore a 5; analogamente la retta NQ rappresenta un « confine » e traduce il fatto che il recipiente c ha una capacità di 3 litri e pertanto il punto rappresentativo di uno stato del sistema non può avere dal lato AB una distanza superiore a 3.

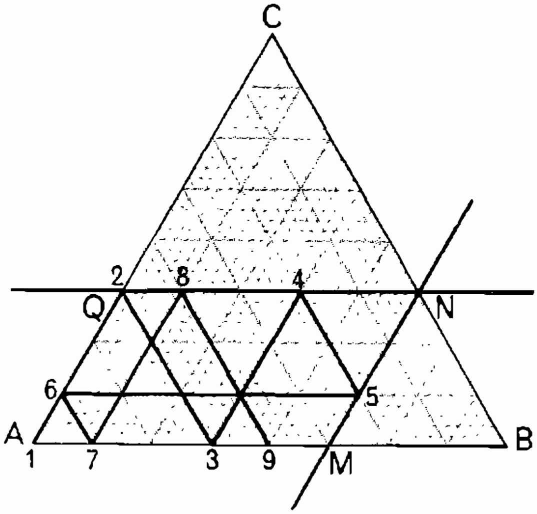

Fig. 2.

È chiaro che il passaggio dallo stato 1, rappresentato dal punto A, allo stato 2, rappresentato dal punto Q, traduce l'operazione che consiste nel travasare 3 litri dal recipiente a al recipiente c, lasciando il recipiente b sempre vuoto; analogamente il passaggio dallo stato rappresentato dal punto Q (segnato anche con il numero 2) allo stato corrispondente al punto segnato con il numero 3 appartenente al lato AB traduce l'operazione che consiste nel versare nel recipiente b i tre litri che si trovavano nel recipiente c, senza toccare il recipiente a. La spezzata che ha come vertici i punti segnati successivamente con i numeri da 1 a 9 traduce quindi le operazioni che conducono alla soluzione del problema, corrispondente allo stato rappresentato dal punto segnato con 9; si noti che, poichè non è ammesso fare segni sui bordi dei recipienti, i punti che rappresentano gli stati del sistema durante il procedimento devono sempre appartenere ai lati del parallelogrammo A, M, N, Q. La successione di stati è rappresentata dalla tabella qui a lato, che non ha bisogno di commenti, quando si sia avvertito che le colonne corrispondono ai recipienti e le righe agli stati.

Recipienti		a	b	c
Stati	1	8	0	0
	2	5	0	3
	3	5	3	0
	4	2	3	3
	5	2	5	1
	6	7	0	1
	7	7	1	0
	8	4	1	3
	9	4	4	0

Come si vede chiaramente dalla figura, la spezzata che rappresenta la catena delle operazioni è quella che percorrerebbe una palla da biliardo che rimbalzasse nell'interno di un biliardo avente le sponde disposte come i lati del parallelogrammo di vertici A, M, N, Q; tuttavia questa circostanza è soltanto accessoria, e può essere considerata come una pura « curiosità » di fronte alla « vera » ragione che giustifica la validità della rappresentazione grafica usata, ragione che trova il suo fondamento nel teorema di geometria elementare che abbiamo ricordato.

Ovviamente il procedimento che abbiamo ricordato non è l'unico possibile; un secondo procedimento che richiede 11 operazioni è illustrato dalla fig. 3 e corrisponde alla successione di stati descritta dalla tabella seguente:

Recipienti		a	b	c
Stati	1	8	0	0
	2	3	5	0
	3	0	5	3
	4	5	0	3
	5	5	3	0
	6	2	3	3
	7	2	5	1
	8	7	0	1
	9	7	1	0
	10	4	1	3
	11	4	4	0

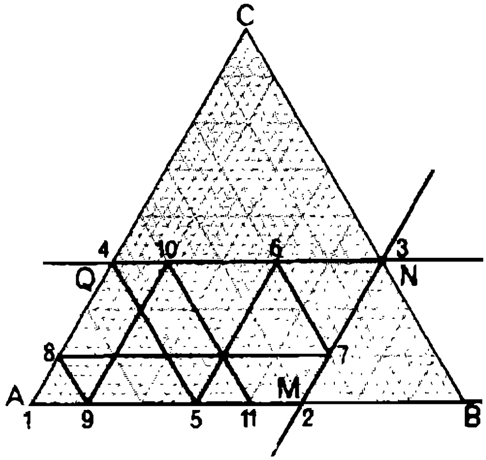

Fig. 3.

Come si vede, in questo secondo procedimento lo stato 4 coincide con lo stato 2 del primo; negli stati successivi i procedimenti coincidono. Ovviamente la diversità dei procedimenti nasce dal fatto che la palla di biliardo è stata mossa lungo AM nel secondo procedimento, invece che lungo AQ.

4. – Il problema che abbiamo illustrato geometricamente nel precedente paragrafo ammette molte varianti su cui vogliamo soffermarci; una prima variante, puramente numerica, consiste nel prendere altri tre numeri: per esempio, il problema viene spesso enunciato imponendo che i tre recipienti a, b, c abbiano rispettivamente capacità di 12, 7 e 5 litri, il primo sia pieno e gli altri vuoti e si vogliano ottenere 6 litri in ciascuno dei primi due. L'illustrazione geometrica è sostanzialmente equivalente alla precedente.

Una seconda variante si presenta nel caso in cui la capacità del recipiente maggiore sia minore (e non uguale) alla somma delle capacità degli altri due. Tipico è il caso in cui i recipienti a, b, c hanno capacità rispettivamente di 12, 9 e 5 litri, il primo è pieno e gli altri due vuoti, e si vogliano avere 6 litri in ciascuno dei primi due.

Anche in questo caso, poichè la quantità di acqua risulta essere costante, la rappresentazione mediante il triangolo equilatero si presenta come la più naturale, sulla base del teorema ricordato. Tuttavia ora le linee parallele ai due lati AB ed AC, che rappresentano i « confini » del campo e traducono le limitazioni di capacità dei recipienti minori, non delimitano – insieme con i lati del triangolo – un parallelogrammo, ma un pentagono di vertici *A*, *M*, *N*, *R*, *Q* (fig. 4).

Anche in questo caso i lati successivi della spezzata che ha il primo vertice nel punto contrassegnato con 1 (e coincidente con il vertice *A*, corrispondente allo stato iniziale in cui il recipiente *a* è pieno e gli altri due sono vuoti) danno i passaggi successivi che sono rappresentati dalla tabella qui sotto, analoga alle precedenti.

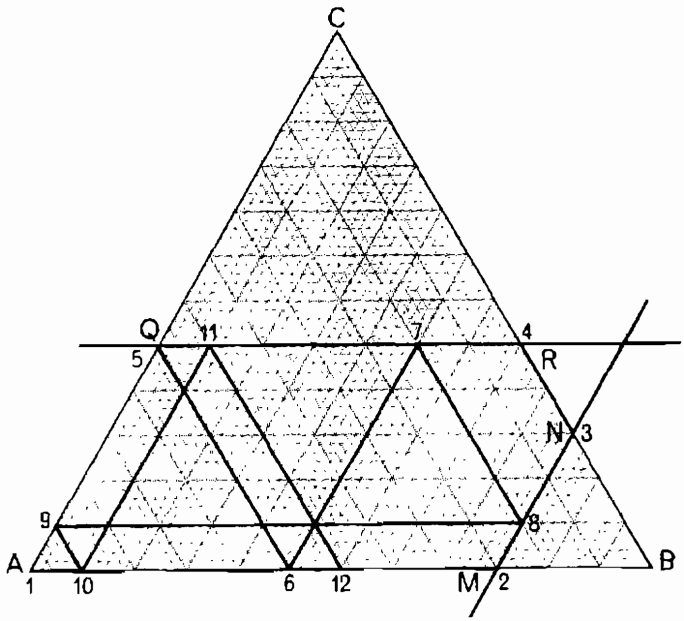

Fig. 4.

Ovviamente anche in questo caso si possono avere delle varianti al procedimento, varianti che si trovano immediatamente seguendo sulla figura l'andamento dei lati della spezzata.

È pure ovvio che il procedimento può essere ricostruito dalla fine, cioè a partire dal punto finale della spezzata, facendo poi « rimbalzare » la palla sull'immaginario biliardo finchè essa non venga a passare per il vertice *A*.

Ovviamente tanto questo procedimento che quello diretto, cioè effettuato a partire dal vertice *A*, può anche servire per constatare l'impossibilità di certi problemi; tale è per esempio, il problema, analogo ai precedenti, nel quale le capacità dei tre recipienti *a*, *b*, *c* sono rispettivamente 12, 9 e 7 litri, il primo recipiente è pieno e si vuole avere una situazione finale con 6 litri in ognuno dei primi due recipienti.

Recipienti		*a*	*b*	*c*
Stati	1	12	0	0
	2	3	9	0
	3	0	9	3
	4	0	7	5
	5	7	0	5
	6	7	5	0
	7	2	5	5
	8	2	9	1
	9	11	0	1
	10	11	1	0
	11	6	1	5
	12	6	6	0

Prima di esporre ulteriori varianti dei problemi, vale la pena di fare esplicitamente una osservazione del tutto immediata.

Nello schema di procedimenti ora esposti si fanno rientrare subito anche i problemi nei quali si hanno a disposizione due soli recipienti, ma si ammette che certe quantità di liquido possano essere « gettate via » oppure « attinte ».

Come dicevamo, questi problemi rientrano nello schema precedente, perchè basta supporre di avere a disposizione un terzo recipiente, la cui capacità sia non minore della somma delle capacità dei due recipienti inizialmente dati e pensare che le quantità « gettate via » vengano invece versate nel terzo recipiente, e le quantità « attinte » siano pure attinte da quest'ultimo.

Ancora più in particolare rientrano in questo schema i problemi nei quali si tratta di « misurare » una certa quantità di liquido avendo a disposizione due soli recipienti, ma avendo la facoltà di « gettar via » o di « attingere » quante volte si vuole.

È chiaro che il primo dei problemi già trattati potrebbe essere enunciato da questo punto di vista; per esempio, se si considerano le tabelle già scritte a proposito del primo problema, ed in particolare le due colonne di destra (segnate *b* e *c*), si vede che usando due recipienti della capacità di 5 e 3 litri, e avendo la facoltà di « gettar via » o di « attingere », è possibile misurare quantità di 4 e 1 litri.

Un problema analogo è quello di misurare due litri, avendo a disposizione due recipienti, uno da 11 ed uno da 7 litri; chiamiamo *b* e *c* rispettivamente tali due recipienti ed immaginiamo che le operazioni di « gettar via » e di « attingere » si riferiscano ad un terzo recipiente, avente capacità 18 litri, che indicheremo con *a*. Possiamo sempre immaginare di partire da uno stato nel quale entrambi i recipienti *b* e *c* sono vuoti e quindi il recipiente *a* è pieno. Il procedimento può essere illustrato da un diagramma triangolare del tutto analogo ai precedenti (fig. 5); le linee *MN* ed *NQ*, che sono i « confini » del diagramma, rappresentano le capacità dei recipienti *b* e *c* rispettivamente; pertanto sono stati esclusi dal diagramma, per ragioni di spazio, le regioni del triangolo che sono vicine ai vertici *B* e *C*, perchè il punto immagine dello stato del sistema non penetra mai in queste. La successione degli stati del sistema può essere seguìta sul diagramma, dove le successive posizioni di una bilia rimbalzante sono segnate con i numeri successivi, da 1 a 19. Tali stati corrispondono alle righe della tabella seguente, nella quale abbiamo segnato con un asterisco uno stato che consegue al precedente dopo aver « gettato via » l'acqua contenuta in uno dei recipienti *b* oppure *c* (nel nostro schema questa operazione viene sostituita da quella di versare nel recipiente *a*) ed abbiamo segnato con due asterischi uno stato che consegue dal precedente dopo aver « attinto » acqua (nel nostro schema tale operazione consiste nel versare acqua dal recipiente *a* in uno degli altri due).

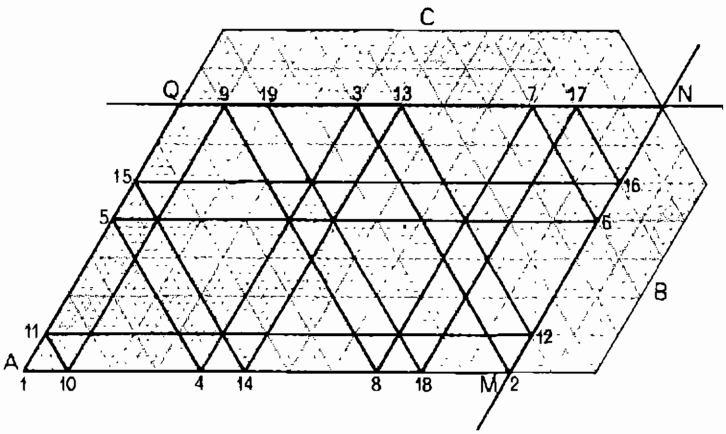

Fig. 5.

Recipienti		a	b	c	Recipienti		a	b	c
Stati	1	18	0	0	Stati	11	17	0	1
	2**	7	11	0		12**	6	11	1
	3	7	4	7		13	6	5	7
	4*	14	4	0		14*	13	5	0
	5	14	0	4		15	13	0	5
	6**	3	11	4		16**	2	11	5
	7	3	8	7		17	2	9	7
	8*	10	8	0		18*	9	9	0
	9	10	1	7		19	9	2	7
	10*	17	1	0					

5. – Una ulteriore variante dei procedimenti che abbiamo indicati fin qui si ha quando, sempre supponendo che il primo dei recipienti abbia una capacità non minore della somma delle capacità degli altri due, si ammette durante il procedimento che la quantità di liquido possa diminuire: che il liquido cioè possa venire gettato oppure bevuto, a seconda dei gusti e della fantasia di chi enuncia il problema.

Anche in questo caso si può far uso del triangolo equilatero e della tecnica di soluzione che abbiamo esposto: la situazione è ora un poco più complicata perchè, ogni volta che una certa quantità di liquido viene distrutta o versata via, la lunghezza dei lati del triangolo varia di conseguenza. Occorre quindi far uso di più diagrammi di questo tipo, che possono essere disegnati distinti o anche sovrapposti.

Si consideri ad es. il problema seguente: È dato un barile di birra, e due recipienti; indichiamo con *a* il barile e con *b* e *c* i due recipienti, che hanno capacità rispettivamente di 5 e 3 litri; della capacità del barile non sappiamo nulla, salvo che è certamente finita e maggiore della somma di $5+3$; si vuole procedere in modo da avere un litro di birra in ognuno dei due recipienti diversi.

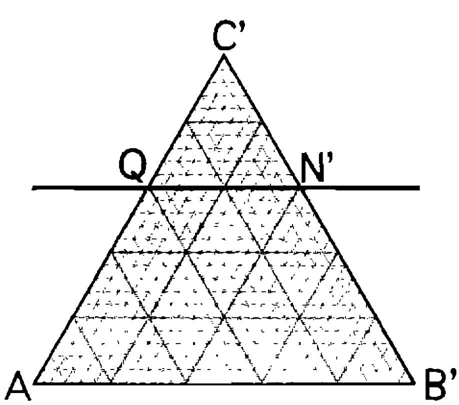

Fig. 6.

In base a ciò che abbiamo osservato nel paragrafo precedente, è sufficiente supporre che la capacità del recipiente *a* (il « barile ») sia uguale alla somma delle capacità dei recipienti *b* e *c*; supporremo quindi che il recipiente *a* abbia capacità 8. Dall'esame delle tabelle date a proposito della soluzione del problema di Tartaglia si deduce che non si incontra uno stato del sistema in cui si abbia un litro in due dei recipienti; è facile convincersi d'altra parte che non esiste un punto corrispondente ad uno stato cosiffatto e che appartiene ai lati del parallelogrammo $AMNQ$. D'altra parte consideriamo il caso in cui si tengano soltanto 5 litri di birra; lo stato del sistema può essere rappresentato da un punto del triangolo $AB'C'$ di lato 5, dove la retta $N'Q$ rappresenta un « confine » e traduce la condizione che il recipiente *c* ha capacità 3 (fig. 6); si verifica subito che non esiste una spezzata che traduca un procedimento di successivi versamenti e riempimenti ed abbia un vertice in un punto corrispondente ad uno stato in cui esiste un litro solo di birra in ciascuno dei recipienti; è quindi necessario iniziare il procedimento con un diagramma triangolare del tipo di quelli delle figg. 2 e 3, corrispondente ad una quantità complessiva di 8 litri, e ad un momento opportuno passare ad un diagramma relativo alla fig. 6, corrispondente ad una capacità complessiva di 5 litri.

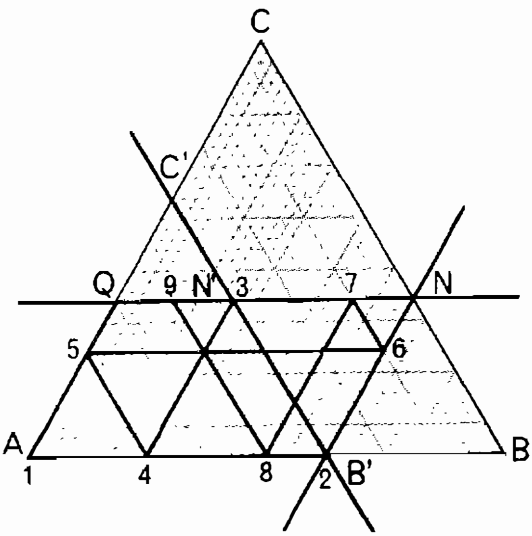

Fig. 7.

Consideriamo quindi un diagramma analogo a quelli delle figg. 2 e 3 nel quale le rette $B'N$ ed NQ rappresentano i « confini » e quindi traducono il fatto che i recipienti b e c hanno rispettivamente capacità 5 e 3 (fig. 7). Iniziamo il procedimento dallo stato rappresentato dal punto A, stato nel quale il recipiente a contiene 8 litri e gli altri due sono vuoti; con successivi travasamenti compiamo una prima parte del procedimento che conduce allo stato rappresentato dal punto 7 del diagramma; la tabella corrispondente è qui a lato.

Recipienti		a	b	c
Stati	1	8	0	0
	2	3	5	0
	3	3	2	3
	4	6	2	0
	5	6	0	2
	6	1	5	2
	7	1	4	3

A questo punto occorre eseguire una effettiva variazione della quantità di liquido che si tratta; pertanto vengono « versati » oppure « bevuti » i tre litri che si trovano nel recipiente c; si ottiene quindi il passaggio al diagramma triangolare $AB'C'$ (che abbiamo disegnato sovrapposto al precedente) nel quale la retta $N'Q$ traduce la capacità del recipiente c. Pertanto la tabella prosegue con i due stati che seguono.

Recipienti		a	b	c
Stati	8	1	4	0
	9	1	1	3

Molti altri problemi possono essere trattati in modo analogo, ma non intendiamo dilungarci. Ci basti avere fornito agli insegnanti degli argomenti che riteniamo utili a ritrovare applicazioni di teoremi classici ed anche a risvegliare nei discenti una sana curiosità verso la matematica ricreativa.

Carlo Felice Manara.